はじめに

現代の数学は，集合と位相の抽象的なことばで書かれ，線形代数と微積分の 2 本の柱で支えられている．この基礎をある程度学んだ読者を，その先に広がる数学の世界へ案内する．言語にたとえれば，集合と位相，線形代数と微積分はそれぞれ，基礎的な文法と日常会話に相当する．それだけの準備があれば，数学の世界の探索に出発できる．

大学の数学科では代数，幾何，解析という分野ごとに学習するのがふつうだが，数学は本来これらが有機的に結合した一体のものである．そこで分野ごとの紹介は基本的な範囲にとどめて，それらが交錯し数学の世界をつくりあげるようすに圏論的な視点から焦点をあてる．

数学の基礎は論理的には集合論にもとづいているが，実質的には圏論的な枠組みで形づくられている．圏論的数学観によれば，数学の対象は 1 つ 1 つが独立に存在するのではなく，同種のあるいは異種の対象との関わりの中に存在する．

はじめに数学の枠組みとしての圏と関手を第 1 章で解説し，幾何学の大域的対象を記述することばとしての層を第 7 章で導入する．これにもとづいて，環と加群，体，ホモロジー，微分形式，正則関数，曲面と多様体という代数，幾何，解析の基本的な対象をそれぞれ第 2 章から第 6 章までと第 8 章の各章で紹介する．最後の第 9 章と第 10 章では，代数，幾何，解析のすべての要素が交錯する場であるリーマン面と楕円曲線を解説する．

各章の内容をひととおり展開するためには，それぞれに本 1 冊分のページ数が必要になるところだが，本書ではとりあげる内容を絞ることで分量を抑えた．第 2 章以降の各章では，数学の基本的な問題への応用を目標として設定し，紹介する理論の効用を明示する．

表題については，「おわりに」で弁明する．

本書でもこれまでの 3 冊と同様，東京大学出版会編集部の丹内利香さんに企画から校正まで助けていただいたことを感謝する．

2019 年 8 月 7 日　斎藤　毅

この本の使い方

引用について

本書を通じて，巻末に「参考書」としてあげた『集合と位相』,『線形代数の世界』,『微積分』を，それぞれ『集合と位相』,『線形代数の世界』,『微積分』として引用する．

『集合と位相』,『線形代数の世界』,『微積分』からの引用はそれぞれ，第5刷，第7刷，第4刷によった．それ以外のものでは引用個所が異なることがありうるので，東京大学出版会のホームページ (http://utp.or.jp/) にある『数学原論』のサポートページを参照していただきたい．

予備知識と各章のつながり

第1章での予備知識としては,『集合と位相』第1章と第2章で解説した，集合と写像についての基本的な内容を理解していれば，論理的には十分である．線形代数からとりあげた具体例を理解するには,『線形代数の世界』の第1章と第2章で解説した，有限次元線形空間の基底や線形写像の行列表示などが必要になる．第7章では，本書の第1章の関手の用語に加えて,『集合と位相』第4章で解説した，位相についての基本的な内容も必要になる．

第2章から第6章までの予備知識としては,『集合と位相』第5章までで解説した集合と位相についての基本的な内容に加えて,『線形代数の世界』の第4章までと第7章の線形代数と,『微積分』第6章までの微積分の内容を想定する．章ごとに必要になるものはこの一部であり，はじめからこれらの内容の習得を前提とするというよりも，本書を読み進めることでその学習の動機が高まることを期待している．

第8章以降では，第6章までで必要な予備知識に加えて,『集合と位相』の第6章と7.1節の内容も必要になる．

各章の論理的なつながりは，だいたい前ページの図のようになっている．第2章から第5章まででは，(1) 第2章と第3章，(2) 第4章，(3) 第5章の5.3節までと第6章の6.2節まで，の3つの部分はほとんどたがいに独立であり，興味に応じてどれからでも読みはじめられる．第5章の後半と第6章の

後半では，第 4 章の内容が必要になる．第 7 章も開集合系による位相や連続写像の定義を既知とすれば，第 1 章に続けて読むことができる．

第 8 章以降では，第 7 章までの内容を使う．ただし，第 8 章では第 6 章の内容は使わない．

章ごとの内容

各章の内容は，それぞれのはじめによりくわしく記述するが，ここでおおまかに紹介する．第 2 章以降の各章では，目標として設定した数学の基本的な問題への応用を，最後の節で解説する．

圏は数学の枠組みを与えると同時に，それ自体 1 つの代数的な対象である．はじめに第 1 章で，圏と関手について基本的な内容を解説し，続いて第 2 章と第 3 章で，それぞれ環と加群，体という代数的な対象を扱う．第 3 章ではガロワ理論を解説し，応用として円分多項式の既約性を証明する．

第 4 章から第 6 章では，代数，幾何，解析の方法がたがいに関わりながら，幾何や解析の世界をつくりあげるようすを紹介する．第 4 章では，幾何的な対象である位相空間を線形代数的にとらえる，ホモロジーの方法を解説する．第 5 章では 2 変数の場合に限定して，微分形式という解析的な対象が，その積分によりホモロジーと結びついて幾何的な性質を表すことを示す．続く第 6 章では微分形式の積分にもとづいて，1 変数の複素関数の理論である複素解析の核心部分を構築する．応用として複素数体は代数閉体であるという代数学の基本定理を証明する．

第 7 章では，はりあわせの条件をみたす関手として層を導入する．第 8 章では，現代の幾何学の舞台である多様体の定義を層のことばで定式化する．2 次元の多様体である曲面の向きと微分形式を層のことばで構成し，第 9 章の準備とする．第 9 章ではリーマン面を定義し，第 8 章までの内容をすべて使いながらその理論を構築する．

最後の第 10 章では，前半で楕円曲線の代数的な理論を解説する．後半では複素数体上の楕円曲線をリーマン面として解析的に扱い，楕円曲線の代数的な表示と解析的な表示の同値性を，第 4 章から第 6 章で扱ったホモロジー，微分形式，正則関数という幾何的，解析的な方法をすべて使って証明する．この同値性から，フェルマーの最終定理の証明で重要な役割を果たしたモジュラー曲線の，複素上半平面の商としての解析的な表示も導く．

証明について

証明はなるべく省略しないようにしたが，とくにくふうの必要のない計算で確認できるものには紙数の節約のために省略したところもある．たとえば，補題 1.4.4 で G が関手であることと φ が関手の射であることや，命題 2.1.1 で $\tilde{f}$ が単系の射であることなどである．これらはいちいち明記しなかったが確認することをおすすめする．

演習問題も紙数の節約のために載せなかった．しかし内容を正確に理解するためには欠かせないので，具体的な例を確認するなどして補うことをおすすめする．