圏の定義（定義 1.2.1）をなじみにくく感じる読者のために

圏は数学の枠組みを与えるという意味では数学の中で特別な位置にあるが，1 つ 1 つの圏は数学の 1 つの対象であり特別なものではない．本文で後述するとおり，グロタンディークの宇宙を考えれば集合論の枠組みからはみ出さずに，数学の様々な対象全体のなす圏を扱うことができる．

圏の定義の 1 つの解釈は本文にあるとおりだが，数学の対象の定義には，その抽象性によって適用範囲の広さを確保する面もあるので，1 つの解釈にとらわれないことも必要である．本書では扱わないが，例えば，ファイバー積による定式化を使って，ファイバー積が存在する圏の中での圏対象を定義することもできる．

可換図式 (1.3) と (1.4) の解説のために，記号を用意する．$f \in M$ に対し，$s(f) = A$, $t(f) = B \in C$ であることを，$f\colon A \to B$ で表す．$A \in C$ に対し，写像 $e\colon C \to M$ による像 $e(A)$ を $1_A \in M$ で表す．ファイバー積 $M \times_{s,C,t} M$ は，$M \times M$ の部分集合 $\{(g, f) \in M \times M \mid s(g) = t(f)\}$ である．$(g, f) \in M \times_{s,C,t} M$ に対し，$c\colon M \times_{s,C,t} M \to M$ による像 $c(g, f)$ を $g \circ f \in M$ で表す．

(1.3) の左の図式の上の行まんなかのファイバー積の元 $(g, f) \in M \times_{s,C,t} M$ に対し，下への写像 $c\colon M \times_{s,C,t} M \to M$ によるその像は $c(g, f) = g \circ f \in M$ である．さらにその左下での像は $t(g \circ f) \in C$ である．左への写像 $\mathrm{pr}_1\colon M \times_{s,C,t} M \to M$ による (g, f) の像は $\mathrm{pr}_1(g, f) = g \in M$ であり，さらにその左下での像は $t(g) \in C$ である．よって，左の四角の可換性は，$(g, f) \in M \times_{s,C,t} M$ に対し，C の元の等式 $t(g \circ f) = t(g)$ がなりたつということである．同様に右の四角の可換性は，$(g, f) \in M \times_{s,C,t} M$ に対し，C の元の等式 $s(g \circ f) = s(f)$ がなりたつということである．

$s(f) = A$, $t(f) = s(g) = B$, $t(g) = D$ とおくと，$s(g \circ f) = s(f) = A$, $t(g \circ f) = t(g) = D$ となる．したがって (1.3) の左の可換図式は，$f\colon A \to B$, $g\colon B \to D$ に対し，$g \circ f\colon A \to D$ ということを表している．

(1.3) の右の図式の左上のファイバー積 $M \times_{s,C,t} M \times_{s,C,t} M$ は，$M \times M \times M$ の部分集合 $\{(h, g, f) \in M \times M \times M \mid s(h) = t(g), s(g) = t(f)\}$ である．$(h, g, f) \in M \times_{s,C,t} M \times_{s,C,t} M$ に対し，(1.3) の左の可換図式より $s(h) = t(g) = t(g \circ f)$ だから，写像 $1_M \times c\colon M \times M \times M \to M \times M$ によ

る像 $(1_M \times c)(h,g,f) = (h,c(g,f)) = (h,g\circ f)$ は $M \times_{s,C,t} M$ の元である．よって，下への写像 $1_M \times c\colon M \times_{s,C,t} M \times_{s,C,t} M \to M \times_{s,C,t} M$ が定まる．さらに $(h,g\circ f)$ の右下での像は $h\circ(g\circ f)\in M$ である．同様に右上まわりの合成写像による (h,g,f) の右下での像は $(h\circ g)\circ f\in M$ である．よって，この四角の可換性は，$(h,g,f)\in M \times_{s,C,t} M \times_{s,C,t} M$ に対し，M の元の等式 $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ がなりたつということである．

$s(f) = A$, $t(f) = s(g) = B$, $t(g) = s(h) = D$, $t(h) = E$ とおくと，$s(h\circ(g\circ f)) = s(g\circ f) = s(f) = A$, $s((h\circ g)\circ f) = s(f) = A$, $t(h\circ(g\circ f)) = t(h) = E$, $t((h\circ g)\circ f) = t(h\circ g) = t(h) = E$ となる．したがって (1.3) の右の可換図式は，$f\colon A\to B$, $g\colon B\to D$, $h\colon D\to E$ に対し $h\circ(g\circ f)\colon A\to E$ と $(h\circ g)\circ f\colon A\to E$ が等しいことを表している．

(1.4) の左の図式の左上の C の元 $A\in C$ に対し，右下への写像 $e\colon C\to M$ によるその像は $e(A) = 1_A\in M$ である．さらにその上への写像 $s\colon M\to C$ による像は $s(1_A)\in C$ である．恒等写像 $1_C\colon C\to C$ による $A\in C$ の像は A だから，右上の三角の可換性は，$A\in C$ に対し $s(1_A) = A$ ということである．同様に左下の三角の可換性は，$A\in C$ に対し $t(1_A) = A$ ということである．したがって，(1.4) の左の可換図式は $1_A\colon A\to A$ を表している．

(1.4) の右の図式の左上の M の元 $f\colon A\to B$ に対し，下への写像 $(1_M, e\circ s)\colon M\to M \times_{s,C,t} M$ によるその像は $(f, e(s(f))) = (f, e(A)) = (f, 1_A)$ である．その右への写像 $c\colon M \times_{s,C,t} M \to M$ による像は $c(f,1_A) = f\circ 1_A$ である．$1_M\colon M\to M$ による $f\in M$ の像は f だから，左下の三角の可換性は，$f\colon A\to B$ に対し $f = f\circ 1_A$ ということである．同様に右上の三角の可換性は，$f\colon A\to B$ に対し $f = 1_B\circ f$ ということである．